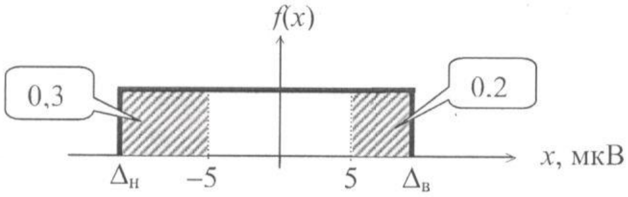
2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Примеры

2.1. Случайная погрешность Δ распределена по закону равномерной плотности. Известны значения вероятностей двух событий — P_1 и P_2. $P_1 = P(\Delta < -5$ мкВ$) = 0{,}3$; $P_2 = P(\Delta > 5$ мкВ$) = 0{,}2$. Определите значения дисперсии $D(\Delta)$ и вероятности $P_3 = P(\Delta > 0)$.

Решение:



плотность вероятности $f(x) = \text{const} = 1 / (\Delta_в - \Delta_н)$;

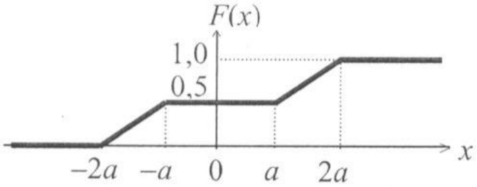
$$P_1 = \int_{\Delta н}^{-5 мкВ} f(x)\,dx = (-5 \text{ мкВ} - \Delta_н) / (\Delta_в - \Delta_н);$$

$$P_2 = \int_{5 мкВ}^{\Delta в} f(x)\,dx = (\Delta_в - 5 \text{ мкВ}) / (\Delta_в - \Delta_н);$$

$$P_1 + P_2 = (\Delta_в - \Delta_н - 10 \text{ мкВ}) / (\Delta_в - \Delta_н) =$$
$$= 1 - 10 \text{ мкВ} / (\Delta_в - \Delta_н);$$
$$\Delta_в - \Delta_н = 10 \text{ мкВ} / (1 - P_1 - P_2) = 20 \text{ мкВ};$$
$$\Delta_в = P_2\,(\Delta_в - \Delta_н) + 5 \text{ мкВ} = 9 \text{ мкВ};$$
$$\Delta_н = -11 \text{ мкВ};$$
$$M(\Delta) = (\Delta_в + \Delta_н) / 2 = -1 \text{ мкВ};$$
$$D(\Delta) = (\Delta_в - \Delta_н)^2 / 12 \approx 33 \text{ мкВ}^2;$$

$$P_3 = \int_0^{\Delta в} f(x)\,dx = \Delta_в / (\Delta_в - \Delta_н) = 0{,}45;$$

2.2. Дан график функции распределения $F(x)$ случайной величины X:



Определите вероятности следующих событий: $P_1 = P(X \le a)$, $P_2 = P(0 \le X \le a)$, $P_3 = P(X > 0)$, $P_4 = P(X < 0)$, $P_5 = P(X = 2a)$. Найдите аналитическое выражение функции плотности вероятности $f(x)$. Определите значения математического ожидания $M(X)$ и с.к.о. σ.

Решение:

$F(x) = P(X < x)$ [$= P(X \leq x)$ для непрерывных величин];

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;

$P_1 = 0,5$;

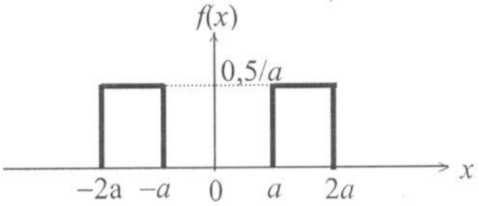
$P_2 = 0$;

$P_3 = P(0 < X < +\infty) = F(+\infty) - F(0) = 0,5$;

$P_4 = P(-\infty < X < 0) = F(0) - F(-\infty) = 0,5$;

$P_5 = 0$.

$f(x) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}x$;



$f(x) = 0$ при $x < -2a$, $-a < x < a$, $x > 2a$;

$f(x) = 0,5 / a$ при $-2a \leq x \leq -a$, $a \leq x \leq 2a$;

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = (0,5 / 2a)\, (a^2 - 4a^2 + 4a^2 - a^2) = 0;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2\, f(x)\, \mathrm{d}x = (0,5 / 3a)\, (-a^3 + 8a^3 + 8a^3 - a^3);$$

$D(X) = 7a^2 / 3$;

$\sigma \approx 1,53a$;

2.3. С помощью аналогового вольтметра проверяют стабильность источника напряжения, для чего производят два измерения, разделенные некоторым промежутком времени, и вычисляют разность полученных значений $u = U_2 - U_1$. Единственной существенной составляющей погрешности измерения является погрешность отсчитывания. Цена деления вольтметра $c_U = 0,05$ В/дел.; отсчеты, сделанные по его шкале, округляются до 0,1 деления. Определите доверительные интервалы абсолютной погрешности измерения u для двух значений доверительной вероятности — $P_1 = 1$ и $P_2 = 0,99$.

Решение:

$\underline{P_1 = 1}$

$u = U_2 - U_1 = u_{\text{и}} + \Delta_{\text{отс2}} - \Delta_{\text{отс1}}$;

$\Delta = \Delta_{\text{отс2}} - \Delta_{\text{отс1}}$;

$\Delta_{\text{отс1}}$, $\Delta_{\text{отс2}}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону равномерной плотности на интервале $(-0{,}5q; +0{,}5q)$, где $q = 0{,}1 \text{дел} \cdot c_U$.

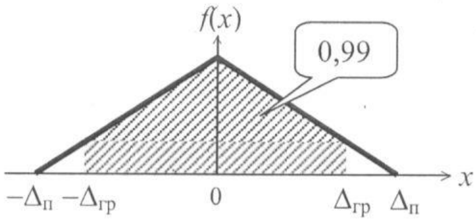
Интервал распределения Δ, $(\Delta_{\text{п.н}}, \Delta_{\text{п.в}})$, является доверительным интервалом для $P_1 = 1$;

$\Delta_{\text{п.н}} = -\Delta_{\text{п.в}} = -\Delta_{\text{п}}$; $\Delta_{\text{п}} = 2\Delta_{\text{отс.п}} = 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05$ В $= 0{,}0050$ В;

Ответ 1: $(-0{,}0050; +0{,}0050)$ В; $P = 1$.

$\underline{P_2 = 0{,}99}$

Δ распределена по закону Симпсона (треугольному);



$P_2 = 1 - [(\Delta_{\text{п}} - \Delta_{\text{гр}}) / \Delta_{\text{п}}]^2$ (площадь пятиугольника);

$\Delta_{\text{гр}} = \Delta_{\text{п}} (1 - \sqrt{1 - P_2}) = 0{,}0045$ В;

Ответ 2: $(-0{,}0045; +0{,}0045)$ В; $P = 0{,}99$.

2.4. Погрешность измерения тока Δ является суммой пяти независимых случайных составляющих $\Delta_1 \ldots \Delta_5$, каждая из которых подчиняется закону равномерной плотности распределения. Интервалы распределения $\Delta_1 \ldots \Delta_5$ соответственно — $(-5{,}0; -3{,}0)$ мкА, $(-3{,}0; -1{,}0)$ мкА, $(-1{,}0; +1{,}0)$ мкА, $(+1{,}0; +3{,}0)$ мкА, $(+3{,}0; +5{,}0)$ мкА. Определить доверительные интервалы Δ для двух значений доверительной вероятности — $P_1 = 1$ и $P_2 = 0{,}99$.

Решение:

$\underline{P_1 = 1}$

Интервал распределения Δ, $(\Delta_{\text{н}}, \Delta_{\text{в}})$, является доверительным интервалом для $P_1 = 1$;

$\Delta_{\text{н}} = \Delta_{\text{н}1} + \Delta_{\text{н}2} + \Delta_{\text{н}3} + \Delta_{\text{н}4} + \Delta_{\text{н}5} =$

$= (-5{,}0 - 3{,}0 - 1{,}0 + 1{,}0 + 3{,}0)$ мкА $= -5{,}0$ мкА,

$\Delta_{\text{в}} = \Delta_{\text{в}1} + \Delta_{\text{в}2} + \Delta_{\text{в}3} + \Delta_{\text{в}4} + \Delta_{\text{в}5} =$

$= (-3{,}0 - 1{,}0 + 1{,}0 + 3{,}0 + 5{,}0)$ мкА $= 5{,}0$ мкА.

Ответ 1: $(-5{,}0; +5{,}0)$ мкА; $P = 1$.

$\underline{P_2 = 0{,}99}$

Закон распределения Δ близок к нормальному с параметрами $M(\Delta)$ и σ;

$\Delta_{\text{н}} = M(\Delta) - z_p\ \sigma$;

$\Delta_{\text{в}} = M(\Delta) + z_p\ \sigma$;

z_p — квантиль нормального распределения,

$z_p = 2{,}58$ для $P = 0{,}99$;
$M(\Delta) = M(\Delta_1) + M(\Delta_2) + M(\Delta_3) + M(\Delta_4) + M(\Delta_5)$;
$M(\Delta_i) = (\Delta_{\text{в}\, i} + \Delta_{\text{н}\, i}) / 2,\ i = 1,2,\ldots 5$;
$M(\Delta) = (-4\ \text{мкА}) + (-2\ \text{мкА}) + 0 + 2\ \text{мкА} + 4\ \text{мкА} = 0$;
$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2$;
$\sigma_i^2 = (\Delta_{\text{в}\, i} - \Delta_{\text{н}\, i})^2 / 12 = (1/3)\ \text{мкА}^2,\ i = 1,2,\ldots 5$;
$\sigma = \sqrt{5/3}\ \text{мкА} \approx 1{,}3\ \text{мкА}$;
$\Delta_{\text{в}} = -\Delta_{\text{н}} \approx 3{,}3\ \text{мкА}$.
Ответ 2: (–3,3; +3,3) мкА; $P = 0{,}99$.

Задачи для самостоятельного решения

2.5. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности и имеет математическое ожидание, равное нулю. Вероятность того, что значение погрешности превысит 1,8 мкВ, равна 0,2.

Определите дисперсию погрешности.

2.6. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности. Значения математического ожидания и дисперсии погрешности равны соответственно 9 мВ и 27 мВ^2.

Определите вероятность того, что погрешность не превысит по модулю 6 мВ.

2.7. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности. Известны вероятности того, что значение погрешности не превысит 200 и 300 мкВ. Они соответственно равны 0,25 и 0,5.

Определите дисперсию погрешности.

2.8. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности. Вероятность того, что значение погрешности не превысит 100 мкВ, равна 0,1. Вероятность того, что значение погрешности превысит 500 мкВ, тоже равна 0,1.

Определите математическое ожидание погрешности.

2.9. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности. Нижняя граница интервала распределения имеет нулевое значение. Среднеквадратическое значение равняется 3,5 мкВ.

Определите вероятность того, что погрешность не выйдет за пределы интервала [6…15] мкВ.

2.10. Случайная погрешность измерения напряжения распределена по закону равномерной плотности. Известны значения плотности вероятности и математического ожидания: соответственно 2мВ$^{-1}$ и –100 мкВ.

Определите вероятность того, что значение погрешности по модулю превысит 100 мкВ.

2.11. Случайная погрешность измерения напряжения Δ распределена по закону Симпсона с математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением равными соответственно нулю и 0,4 мВ.

Определите вероятность попадания Δ в интервал [–1,0 мВ; 1,0 мВ].

2.12. Случайная погрешность измерения напряжения Δ распределена по закону Симпсона. Математическое ожидание Δ равняется нулю. Вероятность того, что $|\Delta| > 0{,}9$ мВ, равняется 0,01.

Определите максимально возможное значение Δ.

2.13. Случайная погрешность измерения напряжения Δ распределена по закону Симпсона. Математическое ожидание Δ равняется нулю. Максимальное значение плотности вероятности равняется 4 мВ$^{-1}$.

Определите дисперсию погрешности Δ.

2.14. Случайная погрешность измерения напряжения Δ распределена по закону Симпсона. Ее максимальное значение равняется 2,0 мВ. Математическое ожидание погрешности равняется нулю.

Определите вероятность попадания Δ в интервал [–1,0 мВ; 1,0 мВ].

ОТВЕТЫ

1.15: 5,1%. **1.16**: – 0,33 %. **1.17**: от 7,5 В до 30 В. **1.18**: нет (0,48 %).

1.19: от 49,65 В до 50,35 В. **1.20**: 1 с. **1.21**: 10. **1.22**: 0,001 В + 0,0002 U. **1.23**: 2 кОм.

1.24: 100 МОм. **1.25**: не более 0,5 мОм. **1.26**: не менее 10 ТОм. **1.27**: не менее 100 кГц.

1.28: не более 63 Ом. **1.29**: 1 %. **1.30**: 1 %. **1.31**: 2,6 %. **1.32**: не менее 5 мкФ.

1.33: от –1 В до 0. **1.34**: от –1,7 В до 0. **1.35**: от –10 мВ до 0. **1.36**: от – 0,20 мА до 0.

1.37: от –5,0 мкА до 0. **1.38**: от –1,0 мА до 0.

2.5: 3 мкВ^2. **2.6**: 1/3. **2.7**: 13×10^3 мкВ^2. **2.8**: 300 мкВ. **2.9**: 0,505. **2.10**: 0,6. **2.11**: 1.

2.12: 1,0 мВ. **2.13**: 0,010 мВ^2. **2.14**: 0,75.

3.5: (0,2633 ± 0,0025) В; P = 0,95. **3.6**: (0,759 ± 0,016) А; P=1. **3.7**: (55,1 ± 1,4) В; P = 0,99.

3.8: (82,64 ± 0,50) мА; P = 1. **3.9**: (500,52 ± 0,23) мВ; P = 1. **3.10**: (27,50 ± 0,69) мкА; P = 0,9.

3.11: (507,5 ± 4,5) мВ; P = 0,95. **3.12**: (51,1 ± 3,6) В; P = 0,9.

3.13: (149,950 ± 0,094) Ом; P = 0,99. **3.14**: (50,1 ± 6,9) В; P = 1.

3.15: (3,0030 ± 0,0065) В; P = 1. **3.16**: (1,897 ± 0,092) В; P = 0,99.

3.17: (255,0 ± 9,8) А; P = 0,9. **3.18**: (563 ± 20) В; P = 1. **3.19**: (84.01 ± 0,43) мА; P = 0,99.

3.20: (160,844 ± 0,062) В; P = 1. **3.21**: (27,5 ± 1,1) мкА; P = 1. **3.22**: (825,0 ± 8,3) мВ; P = 1.

3.23: (26,3 ± 2,5)В: P = 1.

4.5: (10,0 ± 1,4) мВ; P = 0,95. **4.6**: (15,0 ± 1,7) мГн; P = 1. **4.7**: (78,5 ± 4,7) рад/с; P = 1.

4.8: (128,00 ± 0,35); P = 0,99. **4.9**: (48,0 ± 1,0) кДж; P = 0,95. **4.10**: (40,0 ± 1,0) В; P = 1.

4.11: (200 ± 15) Ом; P = 1. **4.12**: (34,2 ± 3,8) Ом; P = 1. **4.13**: (160,0 ± 2,8) В; P = 1.

4.14: $R_{2ном}$ = 255 кОм; $\delta_{п2}$ = 2,8 %.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Δ — абсолютная погрешность;
δ — относительная погрешность;
γ — приведенная погрешность;
$\Delta_{п.н}$ — нижнее предельное значение доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1;
$\Delta_{п.в}$ — верхнее предельное значение доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1;
$\Delta_{п}$ — предельное значение для симметричного доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности, равной 1 ($\Delta_{п} = \Delta_{п,в} = = -\Delta_{п,н}$);
$\Delta_{гр}(P)$ — граничное значение для симметричного доверительного интервала погрешности при доверительной вероятности $P < 1$ (всегда $\Delta_{гр}(P) < \Delta_{п}$);
K_P — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности Р, используемый при вычислении $\Delta_{гр}(P)$: $K_P(P=0{,}9) = 0{,}95$; $K_P(P=0{,}95) = 1{,}1$; $K_P(P=0{,}99) = 1{,}4$;
$\Delta_{о}$ — основная погрешность;
Δ_T — дополнительная температурная погрешность;
Δ_f — дополнительная частотная погрешность;
$K_{вл.т}$ — коэффициент влияния температуры; по умолчанию принимается равным $\Delta_{о.п} / 10\ ^{o}C$;
$\Delta_{отс}$ — погрешность отсчитывания;
$\Delta_{вз}$ — погрешность взаимодействия;
$\Delta_{вз.н}$ — нижнее предельное значение доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности, равной 1;
$\Delta_{вз.в}$ — верхнее предельное значение доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности, равной 1;
$\Delta_{вз.п}$ — предельное значение симметричного доверительного интервала погрешности взаимодействия при доверительной вероятности , равной 1;
η — поправка для измеренного значения, численно равная систематической составляющей погрешности измерения, взятой с противоположным знаком;
c_x — цена деления аналогового измерительного прибора;
q — 1) ступень квантования при интерполяции отсчета аналогового измерительного прибора; 2) ступень квантования цифрового измерительного прибора;
R_V — входное сопротивление вольтметра;
$x_{C,V}$ — модуль емкостного сопротивления вольтметра;
R_A — входное сопротивление амперметра.